**Dạng 4: Hệ phương trình có yếu tố đẳng cấp**

A. Kiến thức

Bài toán: Giải hệ phương trình 

Hệ phương trình đẳng cấp là hệ phương trình thỏa mãn điều kiện 

Ví dụ:  (tổng số mũ của x và y ở mỗi số hạng bằng nhau)

\*) Đẳng cấp ở đây có thể hiểu là cùng cấp độ hoặc số mũ bằng nhau.

Chứng minh: 

Bài toán cụ thể: 

Lời giải

+ Đặt điều kiện

+ Xét với  xem thỏa mãn không

+ Đặt , thay vào cả 2 phương trình trong HPT

+ Với , chia cả 2 vế của phương trình cho  ta được phương trình ẩn 

+ Giải phương trình ẩn 

+ Tính  và so sánh với điều kiện.

+ Kết luận

 **Bài 1:**

Tìm mối liên hệ giữa  thỏa mãn:

a) 

b) 

**Lời giải**

a) Ta có: 

b) Ta có: 

Ta có: 

Vậy 

 **Bài 2:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Cách 1:

- Với  HPT vô nghiệm

- Với , đặt 



+) 



+) 



Vậy PHT có nghiệm 

Cách 2: Ta có , ta có: 





+) TH1: , thay vào (1) ta được: 

 (thỏa mãn)

+) TH2: Tương tự

 **Bài 3:**

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có HPT



\*) Hướng dẫn phân tích thành nhân tử:

Đặt 

Vậy 



+) 

+) TH2: Tương tự

 **Bài 4:** Vòng 2, Chuyên SPHN

Giải hệ phương trình nghiệm hữu tỉ sau: 

**Lời giải**

Từ HPT ta có: 



+) Xét , thay  vào (2) không thỏa mãn.

+) Xét , chia cả hai vế của (\*) cho  và đặt 



+) TH1: , thay vào (2) ta được: 

+) TH2: , 

Vậy các nghiệm  phương trình không có nghiệm.

Vậy nghiệm của HPT là 

 **Bài 5:**

Giải hệ phương trình nghiệm hữu tỉ sau: 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Nhận xét: 

HPT 



Lấy (1).(2) 



Thay vào (1) và (2) ta tìm được nghiệm của HPT.

**Bài 6:** *ĐH Ngoại Ngữ, năm 2014*

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

+) TH1: 

+) TH2: , đặt 



- 

- 

Cách khác: Nhân hao vế của (1) với (4) và trừ (2) ta được:



**Bài 7:** *ĐH Ngoại Ngữ, năm 2007*

Giải hệ phương trình sau 

**Lời giải**

- Với  HPT vô nghiệm

- Với 

Với 

Cách khác: Ta có 

**Bài 8:**

Với giá trị nào của m thì HPT sau có nghiệm 

**Lời giải**

+) 

+) 

Rõ ràng 

Lấy (3) chia cho (4) ta được  thay vào 



Để HPT có nghiệm thì phương trình (5) có nghiệm

Phương trình (5) có nghiệm  thì 

Vậy  là các giá trị cần tìm.

**Ví dụ 1:** Giải các hệ phương trình sau:

1. 
2. 

***Lời giải:***

a) Ta biến đổi hệ: 

 Để ý rằng nếu nhân chéo 2 phương trình của hệ ta có:

  đây là phương trình đẳng cấp bậc 3: Từ đó ta có lời giải như sau:

 Vì  không là nghiệm của hệ nên ta đặt . Khi đó hệ thành:

 

 .

\* .

\* .

 Suy ra hệ phương trình có các cặp nghiệm:

 

 b). Phương trình (2) của hệ có dạng:

 

 **TH1:**  và .

 **TH2:**  

 Nếu ta thay  vào phương trình (\*) thì thu được phương trình đẳng cấp bậc 3: 

 Từ đó ta có lời giải như sau:

 Ta thấy  không là nghiệm của hệ.

 Xét  đặt  thay vào hệ ta có: 

 Chia hai phương trình của hệ ta được:

 

 .

**Ví dụ 2:** Giải các hệ phương trình sau:

1. 
2. 

***Lời giải:***

a) Điều kiện: .

 Phương trình (2) tương đương:

 

 Đây là phương trình đẳng cấp giữa  và .

+ Xét  hệ vô nghiệm

+ Xét . Đặt  ta thu được phương trình: 

 Suy ra 

 Thay vào phương trình (1) ta được: .

 Vậy hệ có một cặp nghiệm: .

b) Dễ thấy phương trình (1) của hệ là phương trình đẳng cấp của  và 

 Điều kiện: .

 Đặt  thay vào (1) ta được: 

 Rút gọn biến  ta đưa về phương trình ẩn :

 .

 Thay vào (2) ta được:

 

 .

 Giải ra ta được .

 Vậy nghiệm của hệ .

**Ví dụ 3:** Giải các hệ phương trình sau:

1. 
2. 

***Lời giải:***

a) Ta có thể viết lại hệ thành:  (1)

 Ta thấy vế trái của phương trình (1) là bậc 4. Để tạo ra phương trình đẳng cấp ta sẽ thay vế phải thành .

 Như vậy ta có:





+ Nếu  không thỏa mãn.

+ Nếu  ta có 

+ Nếu 

 Tóm lại hệ phương trình có các cặp nghiệm:

 

b) Điều kiện . Ta viết lại hệ thành: 

 Ta thấy các phương trình của hệ đều là phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với 

 Dễ thấy  không phải là nghiệm của hệ phương trình.

 Xét . Đặt  thay vào hệ ta có:

 

+ Nếu  thì . Không thỏa mãn hệ

+ Nếu 

 Vậy hệ có 1 cặp nghiệm duy nhất 

**Ví dụ 4:** Giải các hệ phương trình sau

1. 
2. 

***Lời giải:***

a) Điều kiện: . Phương trình (2) của hệ có dạng:

 

 Trường hợp  không thỏa mãn điều kiện

 Trường hợp  ta có hệ: .

 Vế trái của các phương trình trong hệ là phương trình đẳng cấp bậc  đối với . Dễ thấy . Ta đặt  thì thu được hệ:

 

+ Nếu  thì 

+ Nếu  thì 

 Tóm lại hệ có các nghiệm: 

b) Điều kiện: .

 Từ phương trình thứ nhất ta có:  thay vào phương trình thứ hai ta thu được:

 

 Đây là phương trình đẳng cấp bậc 2 đối với  và 

 Đặt  ta thu được: 

 Khi  ta có:  thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta thu được: 

 Tóm lại hệ phương trình có một cặp nghiệm 

**Ví dụ 5:** Giải các hệ phương trình sau

1. 
2. 

***Lời giải:***

a) Điều kiện: .

 Phương trình (2) tương đương:

 .

 Đây là phương trình đẳng cấp đối với  và 

 Ta thấy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi  và  cùng dấu hay .

 Đặt  suy ra 

 .

 **TH1:**  thay vào (1) ta có:

 ****.

 **TH2:**  thay vào (1) ta có:

 .

 Vậy hệ có nghiệm .

b) Điều kiện: 

 Để ý rằng phương trình thứ hai của hệ là phương trình đẳng cấp đối với . Ta thấy nếu  thì từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra , cặp nghiệm này không thỏa mãn hệ.

 Xét . Ta chia phương trình thứ hai của hệ cho  ta thu được: . Đặt  ta thu được phương trình

  

 Khi .

 Phương trình thứ nhất của hệ trở thành: .

 Điều kiện: . Ta thấy  không thỏa mãn phương trình.

 Ta xét . Chia bất phương trình cho  ta thu được phương trình: . Đặt  phương trình trở thành: 

 Xét  Dễ thấy  suy ra phương trình có nghiệm duy nhất 

 Tóm lại hệ phương trình có nghiệm 

 Chú ý: Ta cũng có thể tìm quan hệ  dựa vào phương trình thứ hai của hệ theo cách:

 Phương trình có dạng:

 . Vì  nên ta suy ra 

**Dạng 5: Hệ các đại lượng chung**

**A. Kiến thức**

Dạng tổng quát: 

Phương pháp: Ta sẽ tạo ra một thành phần chung của các phương trình trong hệ phương trình, sau đó kết hợp thành phần chung đó và mỗi phương trình trong hệ phương trình ta sẽ thu được nghiệm của hệ phương trình.

Ta có 



**Bài 1:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Nhận xét 

Nhân vế tương ứng của 3 phương trình ta được: 

+) TH1: 

+) TH2: 

Vậy nghiệm của HPT 

**Bài 2:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Ta có HPT 

+) TH1: 

+) TH2: 

Vậy HPT có nghiệm 

**Bài 3:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có HPT 

Từ (1)(2)(3) 

Lấy (4)-(1) ta được: 

Lấy (4)-(2) ta được: 

Lấy (4)-(3) ta được: 

Vậy HPT có nghiệm 

**Dạng 6: Hệ phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối**

**Bài 1:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Cách 1: Ta xét các trường hợp

- TH1: 

- TH2: 

- TH3: 

- TH4: 

Cách 2: Ta có HPT 

Từ 

Từ 

Vậy HPT 

Vậy HPT có nghiệm 

**Bài 2:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Ta có 



+ TH1: Với , thay vào phương trình (2) ta có



+ TH2: Với , thay vào phương trình (2) ta có 



Vậy HPT có nghiệm .

**Bài 3:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Ta có 

+ Nếu , thay vào HPT ta được 

+ Nếu . Nhân hai vế của phương trình (1) với  ta được:



Lấy (3) + (4) ta được: 

Có 



Vậy  thay vào PHT ta được 

Vậy HPT có nghiệm 

**Bài 4:** *Chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng, năm học 2012*

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

- TH1: 

HPT 

- TH2: 

HPT  (loại)

- TH3: 

HPT 

Từ 

 (do (1)) (loại)

- TH4:  (tương tự TH3) (vô nghiệm)

Vậy HPT có nghiệm 

**Bài 5:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 

- TH1: Với 



- TH2: Với 



Ta có , dấu “=” xảy ra 





Vậy HPT có nghiệm 

**Dạng 7: Hệ phương trình chứa ba ẩn**

**Bài 1:** *Chuyên Khánh Hòa, năm học 2011*

Với  là các số dương, giải HPT: 

**Lời giải**

Ta có 



**Bài 2:** *PTNK, HCM, năm học 2013*

Giải hệ phương trình 

**Lời giải**

Lấy (1) + (2) + (3) ta được:









Thử lại vào HPT đã cho, ta thấy thỏa mãn

Vậy HPT có nghiệm 

**Bài 3:**

Giải hệ phương trình 

**Lời giải**

Nhận xét: Dạng của HPT là  là dạng đối xứng, để giải dạng này có thể giả sử  và chứng minh 

Từ 

Từ 

Không mất tính tổng quát, giả sử 





Từ (4)(5)(6) ta có 

Thay  vào (1) ta được:



**Bài 4:**

Giải hệ phương trình 

**Lời giải**

Từ (1) ta có 

Từ (2) ta có 

Từ (3) ta có 

+ TH1: 

+ TH2:



Vậy HPTcó 6 nghiệm.

**Bài 5:**

Tìm tất cả các số nguyên  thỏa mãn 

**Lời giải**

Từ (1) , thay vào phương trình (2) ta được:



+ TH1: 

+ TH2: 

+ TH3: 

+ TH4: 

+ TH5: 

+ TH6: 

+ TH7: 

+ TH8: 

Vậy HPT có 8 nghiệm.